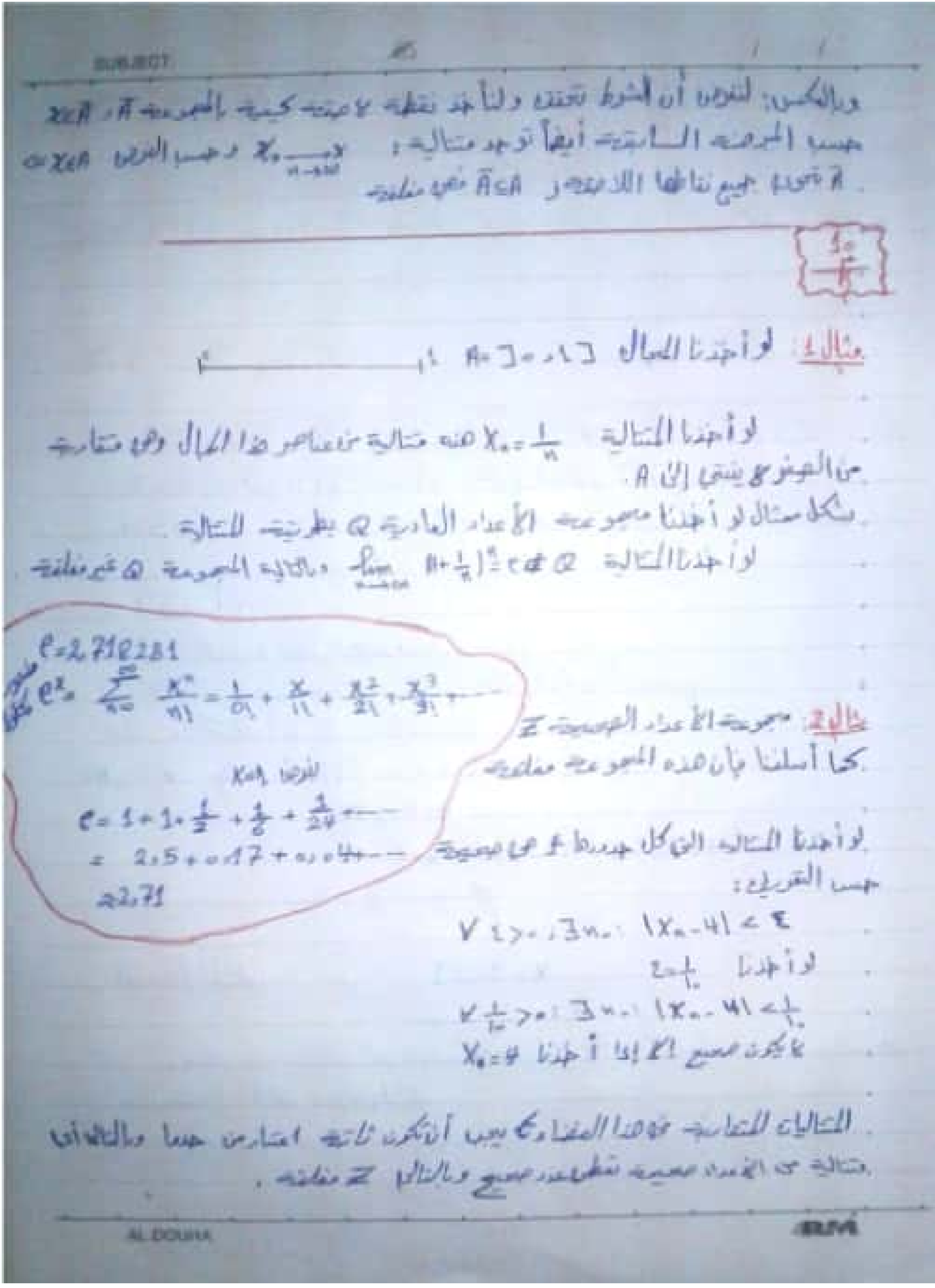


وبالعكس: لنفرض أن الشرط تحقق ولنأخذ نقطة لاصقة كيفية بالمجموعة $\bar{A}$ ، $x \in \bar{A}$
حسب المبرهنة السابقة أيضاً توجد متتالية: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ وحسب الفرض $x \in A$
$\bar{A}$ تحتوي جميع نقاطها اللاصقة و $\bar{A} \subseteq A$ فهي مغلقة.

مثال 1: لو أخذنا المجال $A =]0,1]$

0 ———— 1

لو أخذنا المتتالية $x_n = \frac{1}{n}$ فهذه متتالية من عناصر هذا المجال وهي متقاربة من الصفر لا ينتمي إلى A.
شكل مثال لو أخذنا مجموعة الأعداد الناطقة Q بطريقة المتتالية.
لو أخذنا المتتالية $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \notin Q$ وبالتالي المجموعة Q غير مغلقة

$e = 2,718281$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

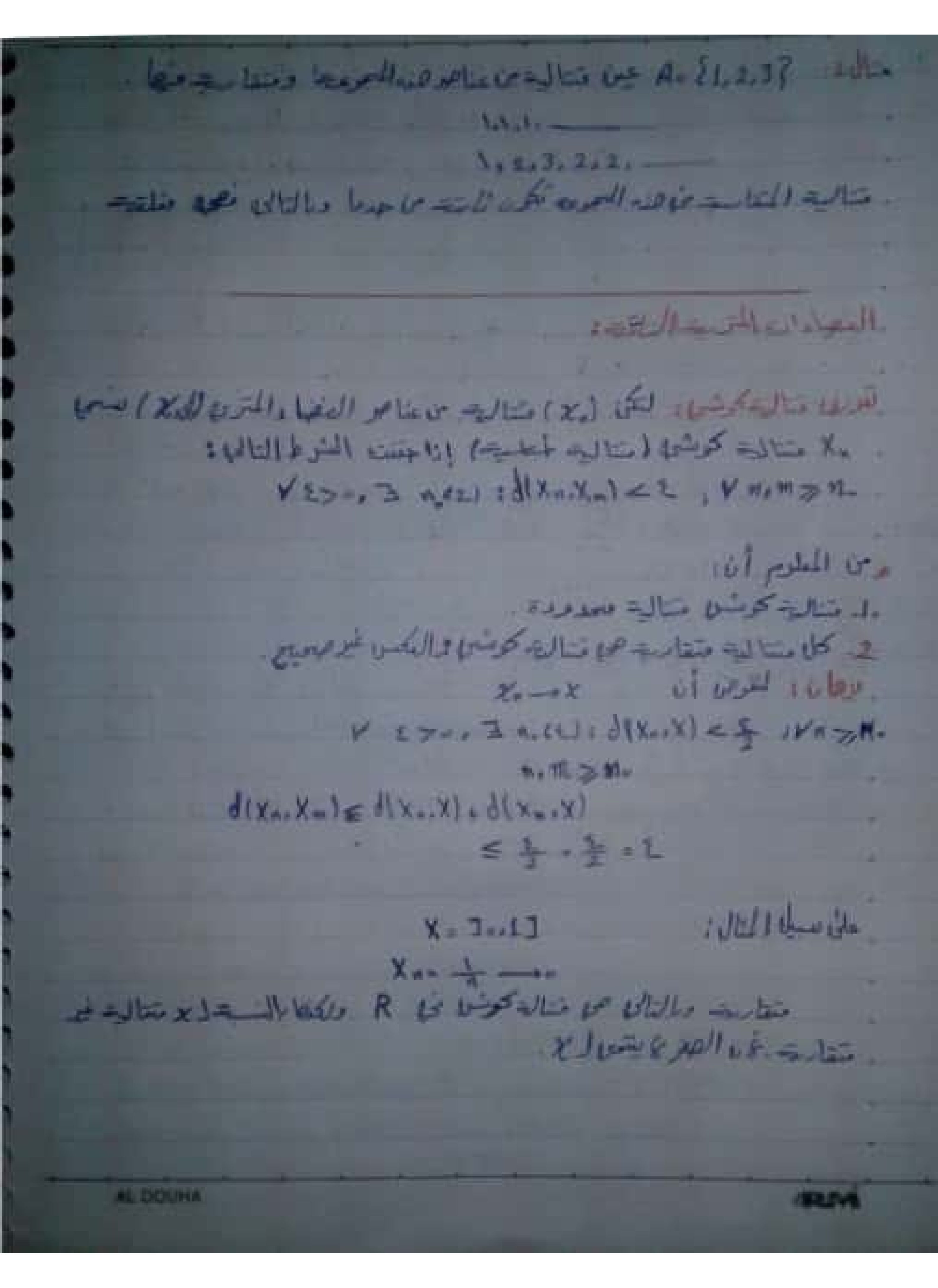
نضع $x=1$

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$
$= 2,5 + 0,17 + 0,04 + \cdots$
$\simeq 2,71$

مثال 2: مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$
كما أسلفنا فإن هذه المجموعة مغلقة.

لو أخذنا المتتالية التي كل حدودها في المجموعة
حسب التعريف:
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : |x_n - 4| < \varepsilon$
لو أخذنا $\varepsilon = \frac{1}{10}$
$\forall \frac{1}{10} > 0 : \exists n_0 : |x_n - 4| < \frac{1}{10}$
لا يكون صحيح إلا إذا أخذنا $x_n = 4$

المتتاليات المتقاربة في هذا الفضاء يجب أن تكون ثابتة اعتباراً من حد ما وبالتالي أي متتالية من الأعداد الصحيحة تتقارب من عدد صحيح وبالتالي $\mathbb{Z}$ مغلقة.



مثال: عين متتالية من عناصر هذه المجموعة ومتقاربة منها $A=\{1,2,3\}$؟

$1,1,1,\ldots$ ———

$1,2,3,2,2,\ldots$ ———

متتالية المتقاربة من هذه المجموعة تكون ثابتة من حد ما وبالتالي فهي مغلقة.

الفضاءات المترية التامة:

تعريف متتالية كوشي: لتكن (x_n) متتالية من عناصر الفضاء المتري (X,d) نسمي x_n متتالية كوشي (متتالية أساسية) إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon) : d(x_n,x_m)<\varepsilon , \forall n,m \geq n_0$$

من المعلوم أن:

1. متتالية كوشي متتالية محدودة.
2. كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي والعكس غير صحيح.

برهان: لنفرض أن $x_n \to x$

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon) : d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2} , \forall n \geq n_0$$

$$n,m \geq n_0$$

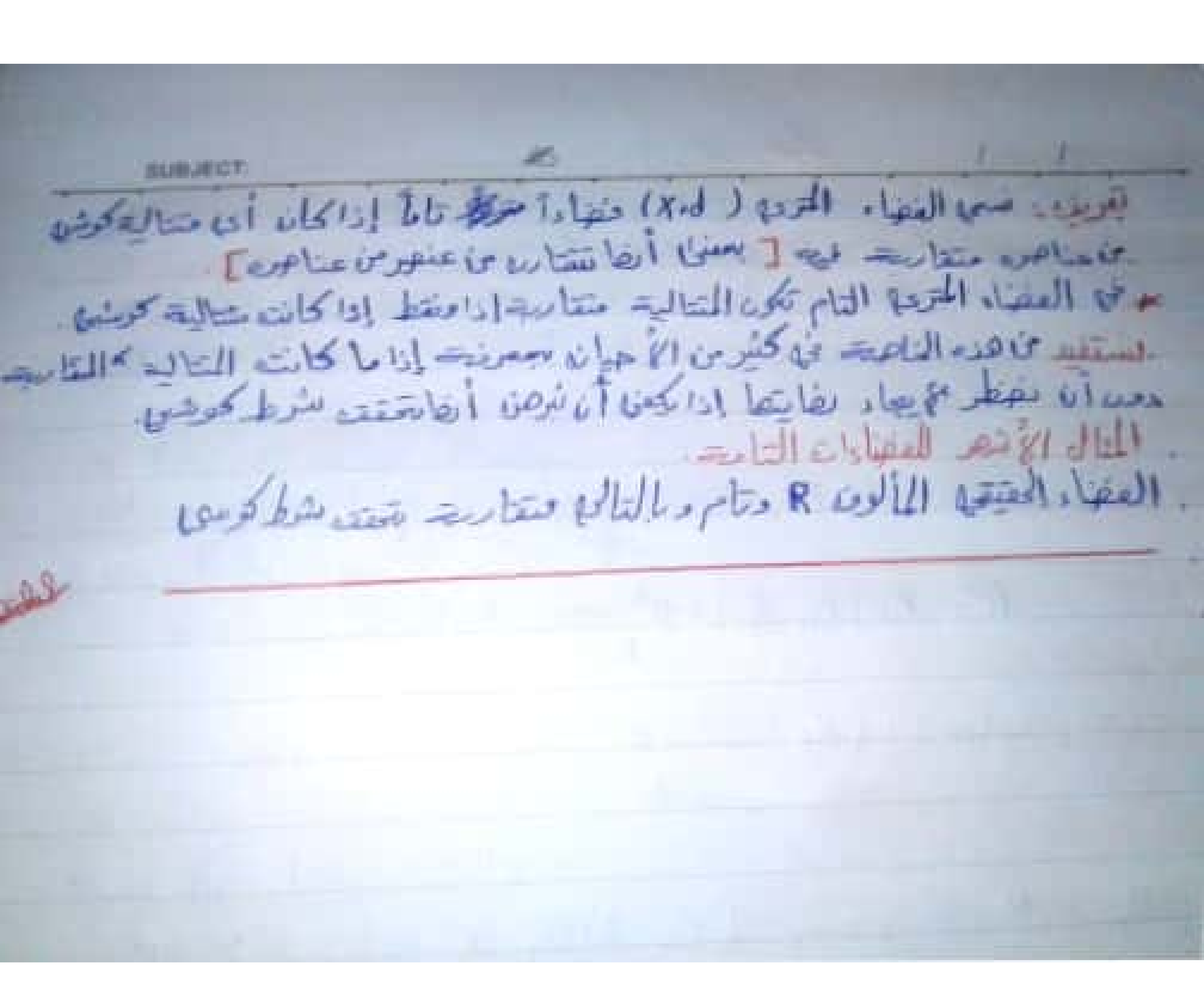
$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x)+d(x_m,x)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

على سبيل المثال: $X=]0,1]$

$$x_n=\frac{1}{n} \to 0$$

متقاربة وبالتالي هي متتالية كوشي في R ولكنها بالنسبة لـ X متتالية غير متقاربة لأن الصفر لا ينتمي لـ X

AL DOUHA



SUBJECT:

تعريف: نسمي الفضاء المتري (X, d) فضاءً تاماً إذا كانت أي متتالية كوشي من عناصره متقاربة فيه [بمعنى أنها تتقارب من عنصر من عناصره]

* في الفضاء المتري التام تكون المتتالية متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية كوشي.

نستفيد من هذه الخاصية في كثير من الأحيان بمعرفة إذا ما كانت المتتالية متقاربة دون أن نضطر لإيجاد نهايتها إذ يكفي أن نبرهن أنها تحقق شرط كوشي.

المثال الأشهر للفضاءات التامة:

الفضاء الحقيقي المألوف R وتام وبالتالي متقاربة تحقق شرط كوشي